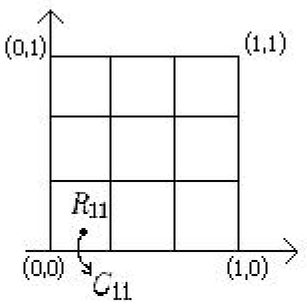
Integrales impropias (funciones no acotadas)

Sea R el cuadrado unitario $[0,1]\times[0,1]$ y sea $f:R\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & si \quad x\neq 0\\ f(0,y)=0\end{cases}$$

f no está acotada en R, pues conforme x se acerca a cero, f se vuelve arbitrariamente grande. Sea $R_{i,j}$ una partición regular de R y formemos las suma de Riemann

$Sn=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{n-1}f(c_{ij})\Delta x\Delta y$



Sea R_{11} el subrectángulo que contiene a $(0,0)$ y escojamos algún C_{11}. Para n fija, podemos hacer S_n tan grande como queramos al escoger C_{11} mas y mas cerca de $(0,0)$, entonces, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ no puede ser independiente de la selección de C_{ij} sin embargo, evaluemos formamelmente la integral iterada de f, siguiendo las reglas para integrar una función de una variable.

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}dy=\int_0^1 2\sqrt{x}\Big|_0^1 dy=\int_0^1 2dy=2$$

Si invertimos el orden de integracón obtenemos el mismo valor. Asi en cierto sentido, esta función es integrable. La pregunta es en que sentido.

Supongamos que la región D es del tipo 1 y $f:D\to\mathbb{R}$ es continua y acotada exepto en ciertos puntos de la frontera. Y que f es no negativa y D está descrita por

$$a\leq x\leq b\ ,\ \phi_1(x)\leq y\leq\phi_2(x)$$

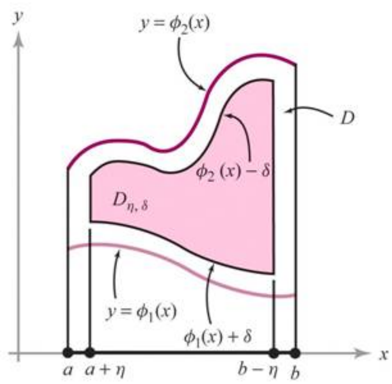
Escogemos números $\delta,\eta>0$ tales que $D_{\delta\eta}$ sea el subconjunto de D formado por los puntos (x,y) con

$$a+\eta\leq x\leq b-\eta\ ,\ \phi_1(x)+\delta\leq y\leq\phi_2(x)-\delta$$

Como f es integrable sobre $D_{\eta\delta}$ podemos aplicar fubini.

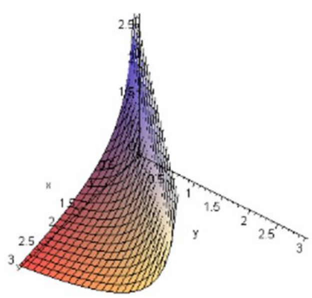
$$\int\int_{D_{\eta\delta}}fdA=\int_{a+\eta}^{b-\eta}\int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta}f(x,y)dydx$$

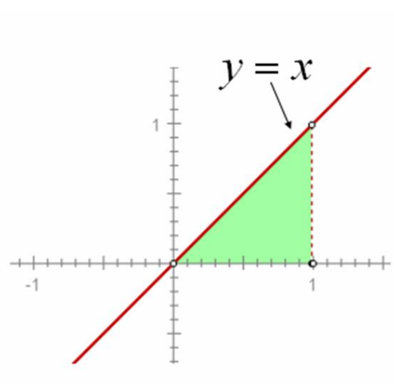
Entonces si f es integrable sobre D tenemos $\displaystyle\int\int_D fdA=\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)}\int_{a+\eta}^{b-\eta}\int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta}f(x,y)dydx$



donde η y δ se escogen lo suficientemente pequeños para que $D_{\eta\delta} \subset D$. Como f es continua y acotada en $D_{\eta\delta}$ existe la integral $\displaystyle\int\int_{D_{\eta\delta}} f dA$ ahora siempre que $\displaystyle\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \int\int_{D_{\eta\delta}} f dA$ existe, decimos que la integral de f sobre D es convergente o que f es integrable sobre D y definimos $\displaystyle\int\int_{D} f dxdy = \lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \int\int_{D_{\eta\delta}}$

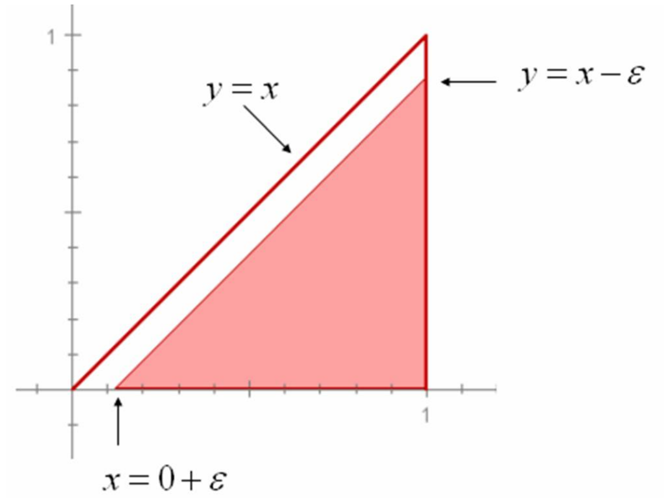
Ejemplo:
Evaluar $\displaystyle\int\int_R \frac{dA}{\sqrt{x-y}}$ donde R es el triángulo acotado por los ejes X y la linea $x = 1$ y la linea $y = x$
Sol.





En la recta $y = x$, $\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ no esta definida por lo tanto escribimos

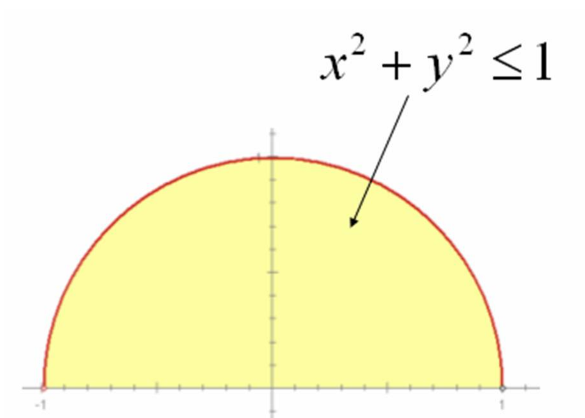
$\displaystyle\int\int_R \frac{dA}{\sqrt{x-y}} = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x-y}}$ y notamos que la integral interior es impropia por lo que



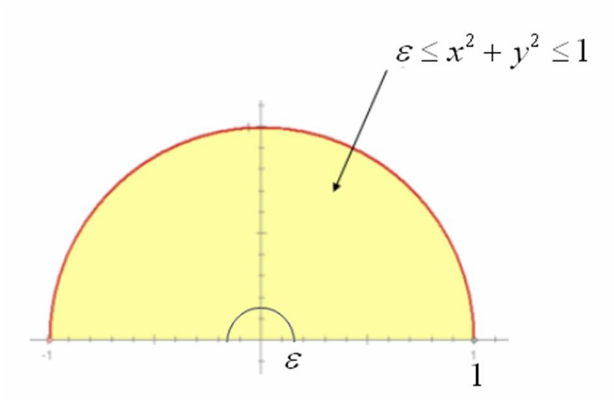
$$\int\int_R \frac{dA}{\sqrt{x-y}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 dx\int_o^{x-\varepsilon}\frac{dy}{\sqrt{x-y}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 dx \lim_{\varepsilon\to 0^+} -2\sqrt{x-y}\Big|_0^{x-\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 dx \lim_{\varepsilon\to 0^+} -2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\int_\varepsilon^1 \sqrt{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_\varepsilon^1\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\varepsilon^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo:
Calcular la integral $\int\int_R \frac{y}{x^2+y^2}dxdy$ siendo R el interior de la semicircunferencia centrada en el origen y de radio 1. Es decir $R=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$.



Sol. Vamos a definir $R_\varepsilon=\{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2|\varepsilon\le x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$. En este caso será util realizar el cambio a cordenadas polares donde $\theta\in[0,\pi]$, $\quad r\in[\epsilon,1]$ entonces



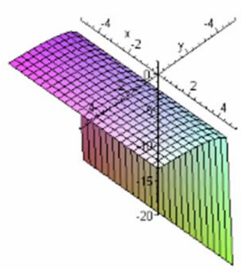
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\int_{RE} \frac{y}{x^2+y^2} dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi} \int_{\epsilon}^{1} r \cdot \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r^2} drd\theta =$$

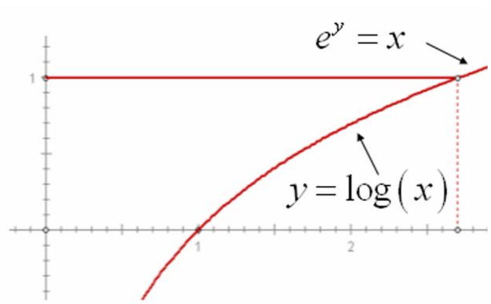
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi} \int_{\epsilon}^{1} sen\theta drd\theta = \lim_{\varepsilon \to 0} (1-\varepsilon) \left[-cos\theta\right]_0^{\pi} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2(1-\varepsilon) = 2$$

$$\therefore \quad \int\int_{R} \frac{y}{x^2+y^2} dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\int_{RE} \frac{y}{x^2+y^2} dxdy = 2$$

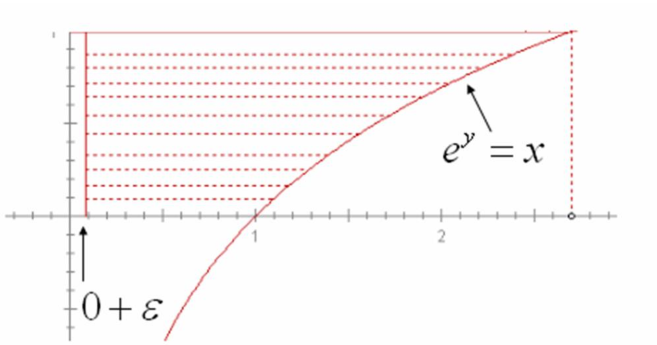
Ejemplo:

Estudiar la convergencia y calcular, si es posible, la integral impropia $I = \int\int_D log(x)dxdy$ siendo $D = \{(x,y)|0 \leq y \leq 1 \quad 0 \leq x \leq e^y\}$.





Sol. Como $\log(x)$ no está acotada en $(0,0)$ la región de integración la definimos asi:



$D_\varepsilon = \{(x,y)\epsilon D | \epsilon \leq x \leq e^y, \quad 0 \leq y \leq 1\}$
$\therefore$ La integral $\int\int_{D_\epsilon} \log(x)dxdy$ queda asi:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1\int_\epsilon^{e^y}\log(x)dxdy = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1\left(xlog(x) - x\Big|_\epsilon^{e^y}\right)dy = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1 e^y\log(e^y) - e^y - (\epsilon\log(\epsilon) - \epsilon)\,dy =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 (ye^y - e^y - \epsilon\log(\epsilon) + \epsilon)\,dy = \lim_{\epsilon\to 0}\left(ye^y - 2e^y - (\epsilon\log(\epsilon) - \epsilon)\,y\,\Big|_0^1\right) =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}(e - 2e - (\epsilon\log(\epsilon) - \epsilon) - (-2)) = 2 - e$$

El término $(\epsilon\log(\epsilon) - \epsilon)$ de la penultima igualdad tiende a cero pues

$$\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon\log(\epsilon) - \epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log(\epsilon)}{\frac{1}{\epsilon}} \underbrace{=}_{l'hopital} \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\epsilon}}{\frac{-1}{\epsilon^2}} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{-\epsilon^2}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} -\epsilon = 0$$